第 36 卷 第 2 期 核 动 力 工 程 Vol.36. No.2
2 0 1 5 年 4 月 Nuclear Power Engineering Apr. 2015

文章编号：0258-0926(2015)02-0037-05; doi: 10. 13832/j. jnpe. 2015. 02. 0037

非惯性系中流体质量力通用表达式研究

周 磊[1]，葛 超[2]，昝元锋[1]，闫 晓[1]，陈炳德[1]

1. 中国核动力研究设计院中核核反应堆热工水力技术重点实验室，成都，610041
2. 中核核电运行管理有限公司，浙江嘉兴，314300

摘要：运动条件下的热工水力问题通常需要在非惯性系中进行研究，从而引出重力的坐标变换和运动附加力计算的问题。本文基于严格的数学推导，得出三维转动的坐标过渡矩阵，给出流体质量力的通用展开式，并对几种典型海洋条件下流体所受质量力进行讨论，可供运动条件下流体动力学或热工水力研究参考。

关键词：运动条件附加力；非惯性系；动量方程；通用表达式；典型海洋条件

中图分类号：TL333 文献标志码：A

Study on General Expression for Liquid Force Per Unit Mass under Non-Inertial Reference Frame

Zhou Lei[1], Ge Chao[2], Zan Yuanfeng[1], Yan Xiao[1], Chen Bingde[1]

1.CNNC Key Laboratory on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics Technology, Nuclear Power Institute of China, Chengdu, 610041，China；
2. CNNP Nuclear Power Operations Management Co. Ltd, Jiaxin, Zhejiang, 314300, China

Abstract：Thermal hydraulic problems under motion conditions are usually studied in non-inertial reference frames for convenience, which results in the necessity of gravity vector transformation and additional forces calculation. Based on the strict mathematical deductions, the transformation matrix of orthogonal coordinates for 3 dimensional rotating has been derived and the general expression for liquid force per unit mass under non-inertial reference frame was obtained in this paper. Forces under various typical ocean moving conditions were also calculated and discussed for application purpose. This paper provides a useful reference for thermal hydraulic researches under motion conditions.

Key words: Additional forces by motion, Non-inertial system, Momentum equation, General expression, Typical ocean conditions

0 引 言

在惯性参考系下观察运动物体内部的流体运动，数学描述上较为复杂。此时往往选取运动物体作为参考系使问题简化。为了研究海洋运动条件对船用反应堆冷却剂的影响，可将坐标系固定在船体上，并将船体的 3 个轴线方向设定为坐标轴[1]。此时产生 2 个问题：①运动坐标系和惯性坐标系可能不一致，涉及到重力等矢量的坐标变换问题；②运动坐标系可能是非惯性系，此时流体会受到运动附加力。这 2 个问题是研究运动条件下流动传热问题的出发点，具有十分重要的意义。钱立波等人采用图示法，得到了数种典型和两两耦合海洋条件下一维冷却剂流道所受的质量力[2]，但未给出一般通式；此外，图示法对于三维问题较易出错且难以独立验证。

本研究基于严格的数学推导，得出流体质量力（重力和运动附加力）在非惯性系中的通用表达式，并基于通式讨论几种典型海洋运动条件下

收稿日期：2014-03-21；修回日期：2014-11-14
作者简介：周 磊（1984—），男，助理研究员，现从事反应堆热工水力程序开发和实验研究工作

的质量力。

1 非惯性系中流体动量方程

流体力学给出非惯性系下动量方程为[3]：

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}=-\nabla p+\nabla\cdot\mu\nabla\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}+\rho\boldsymbol{f} \tag{1}$$

式中，ρ 为流体密度，kg/m^3；$\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ 为流体相对于非惯性系的速度，m/s；p 为压力，Pa；μ 为动力粘度，N·s/m^2；$\boldsymbol{f}$ 为质量力，m/s^2。

其中质量力包括重力和运动附加力，表达式为：

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}-\left[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}\right] \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{g}$ 为重力加速度，大小可视为常数且方向竖直向下，m/s^2；$\boldsymbol{a}$ 为平动加速度，m/s^2；$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 为惯性离心力，m/s^2；$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}$ 为切向加速度，m/s^2；$2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ 为科里奥利加速度，即牵连加速度，m/s^2；$\boldsymbol{\omega}$ 为角速度，rad/s。

式（2）为矢量形式，形式简洁，应用中必须对其进行展开。但因为式中各个变量定义的坐标系并不一致，所以对其进行展开的关键是完成矢量的坐标变换。

2 质量力在非惯性系中的通用展开式

根据矢量的不变性，若坐标系 α,β 的坐标基之间满足下式：

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C} \tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{C}$ 为由坐标系 α 向坐标系 β 的过渡矩阵。

那么向量在 α 和 β 上的坐标 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 满足[4]：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

得出了过渡矩阵就很容易给出矢量的坐标变换式。为了记号简单，下文将用 $\boldsymbol{D}$ 表示 $\boldsymbol{C}^{-1}$。

平动不会改变坐标基，转动会引起坐标基方向的改变。设非惯性系相对于惯性系的转动角位移为 $\boldsymbol{\Theta}=\Phi\boldsymbol{n}$，其中 Φ 为角位移的模，$\boldsymbol{n}$ 表示角位移的方向，为单位矢量。基于严格的数学推导可得出矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的元素为：

$$\begin{aligned}
d_{11}&=(1-n_1^2)\cos\Phi+n_1^2\\
d_{12}&=n_1n_2(1-\cos\Phi)+n_3\sin\Phi\\
d_{13}&=n_1n_3(1-\cos\Phi)-n_2\sin\Phi\\
d_{21}&=n_2n_1(1-\cos\Phi)-n_3\sin\Phi\\
d_{22}&=(1-n_2^2)\cos\Phi+n_2^2\\
d_{23}&=n_2n_3(1-\cos\Phi)+n_1\sin\Phi\\
d_{31}&=n_3n_1(1-\cos\Phi)+n_2\sin\Phi\\
d_{32}&=n_3n_2(1-\cos\Phi)-n_1\sin\Phi\\
d_{33}&=(1-n_3^2)\cos\Phi+n_3^2
\end{aligned} \tag{5}$$

式中，n_i 表示 $\boldsymbol{n}$ 的第 i 个元素（下文其余记号类似）。

根据式（4），可首先对各个矢量进行坐标变换，统一坐标系。然后利用矢量的叉乘运算就可得到流体质量力的通用展开式。

为此首先引入流体力学中广泛使用的克罗内克符号（即单位张量）[5] δ_{ij}：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{6}$$

以及置换张量[5]：

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & i,j,k\ \text{顺序排列}\\ -1 & i,j,k\text{逆序排列}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases} \tag{7}$$

引入爱因斯坦求和约定：即乘积项 2 个自由下标相同时表示遍历下标求和。可将式（5）写成如下简洁形式：

$$d_{ij}=n_in_j(1-\cos\Phi)+\varepsilon_{ijk}n_k\sin\Phi+\delta_{ij}\cos\Phi \tag{8}$$

根据符号的定义还可验证下两式成立[5]：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{9}$$

以及：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\varepsilon_{ijk}a_jb_k \tag{10}$$

利用式（8）~式（10），可得质量力在非惯性系中通用展开式为：

$$\begin{aligned}
f_i=d_{ij}g_j-[&d_{ij}a_j+2\varepsilon_{ijk}d_{js}w_su_{R,k}+\varepsilon_{ijk}d_{js}\beta_sx_k\\
&+d_{js}\omega_sd_{il}\omega_lx_j-d_{js}\omega_sd_{jl}\omega_lx_i]
\end{aligned} \tag{11}$$

式中，x_{i} 表示坐标 r 的第 i 个分量；β_{i} 表示角加速度的第 i 个分量。

在应用时常常需要知道在特定方向 $\boldsymbol{s}$ 质量力分量的大小，这只需要将上式进行投影即可：

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}=f_is_i \tag{12}$$

3 典型海洋条件的质量力

第 2 节的推导过程中未引入任何限制性假设，因而得出的通用表达式可适用于任意的海洋

运动。在热工水力研究中，常对海洋运动条件进行简化，重点对典型海洋条件进行细致研究[1-2]。

3.1　船体侧倾

绕 x 轴有静态角位移，即：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Phi}=\Phi[1,0,0]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\omega}=0\\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t=0\\ \boldsymbol{a}=0\end{cases}\tag{13}$$

代入式（5），坐标变换矩阵 $\boldsymbol{D}$ 简化为：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\Phi&\sin\Phi\\0&-\sin\Phi&\cos\Phi\end{bmatrix}\tag{14}$$

质量力只有重力，代入式（11）得到质量力在非惯性系中的坐标为：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\Phi&\sin\Phi\\0&-\sin\Phi&\cos\Phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\-g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-g\sin\Phi\\-g\cos\Phi\end{bmatrix}\tag{15}$$

3.2　船首倾

即绕 y 轴有静态角位移，经过类似的简单运算可得出：

坐标变换矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\cos\Phi&0&-\sin\Phi\\0&1&0\\\sin\Phi&0&\cos\Phi\end{bmatrix}$；

质量力只有重力，坐标为 $\begin{bmatrix}g\sin\Phi\\0\\-g\cos\Phi\end{bmatrix}$。

3.3　水平加速

在船体加速或减速前进时即为此种情况。即沿 x 轴平动：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Phi}=0\\ \boldsymbol{\omega}=0\\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t=0\\ \boldsymbol{a}=[a(t),0,0]^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{16}$$

代入式（5）运算得到坐标变换矩阵 $\boldsymbol{D}$ 变为：

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\tag{17}$$

$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，表明坐标无变化。这和平动不改变坐标轴的方向这一事实相互吻合。质量力有重力和平动加速度，代入式（11）得出坐标为：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\-g\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a(t)\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-a(t)\\0\\-g\end{bmatrix}\tag{18}$$

3.4　横向加速

在船体受到风浪涌的作用时可能表现为横向加速运动，有时研究传热部件横向振动对热工水力特性的影响也需要考虑这种情况。其实质也就是沿着 y 轴的平动；经过类似的运算可得出质量力表达式为 $[0,-a(t),-g]^{\mathrm{T}}$。

3.5　升降运动

船体上浮、下沉或者由于波浪的作用上下振动时可能表现为升降运动。其实质是沿着 z 轴的平动。经过简单的运算可得出质量力表达式为 $[0,0,-(g+a(t))]^{\mathrm{T}}$。

此时流体质点不单受到重力的影响，还受到运动附加力的影响，由于附加力也是竖直方向，因此常将两者的合力称为净重力加速度。已有研究一般将升降运动处理成正弦型周期运动。

3.6　横摇

即沿着 x 轴的往复转动。热工研究上常常简化为正弦运动：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Phi}=\Phi[1,0,0]^{\mathrm{T}}=A_{\mathrm{m}}\sin\dfrac{2\pi}{T}t[1,0,0]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\omega}=\dfrac{2\pi}{T}A_{\mathrm{m}}\cos\dfrac{2\pi}{T}t[1,0,0]^{\mathrm{T}}=\omega[1,0,0]^{\mathrm{T}}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t=-\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2A_{\mathrm{m}}\sin\dfrac{2\pi}{T}t[1,0,0]^{\mathrm{T}}=\beta[1,0,0]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}=[0,0,0]^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{19}$$

式中，A_{m} 为最大摇摆角，rad；T 为摇摆周期，s。β 为角加速度的大小，rad/s^2。

将式（19）代入式（5）得出坐标变换矩阵 $\boldsymbol{D}$ 变为：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\Phi&\sin\Phi\\0&-\sin\Phi&\cos\Phi\end{bmatrix}\tag{20}$$

角速度在非惯性系中的坐标为：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\Phi&\sin\Phi\\0&-\sin\Phi&\cos\Phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega\\0\\0\end{bmatrix}\tag{21}$$

对于单轴转动，角速度在非惯性系中的坐标

不发生变化；同理可验证角加速度亦如此。这使得在进行叉乘运算时不需考虑这些量的坐标变换，这就是已有研究在处理典型海洋条件时未考虑矢量的坐标变换而得出了正确结果的原因。

利用质量力的通式（11），经过简单的运算可得到质量力为：

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}0\\-g\sin\Phi+\beta z+\omega^2 y+2\omega u_{\mathrm{R},z}\\-g\cos\Phi-\beta y+\omega^2 z-2\omega u_{\mathrm{R},y}\end{bmatrix}\tag{22}$$

质量力包含了重力、切向加速度、离心力和科氏力。质量力在 2 个方向有投影，并且也是周期性的变化，且周期和运动周期相同，但是其变化规律不再是正弦或余弦曲线。图 1 所示是对于摇摆幅度 45 °，摇摆周期 10 s，将流速分量设定为 5 m/s，y 和 z 的值设定为 10 m 得到的。图 2 进一步比较了质量力的 y 向分量各个构成部分的大小。

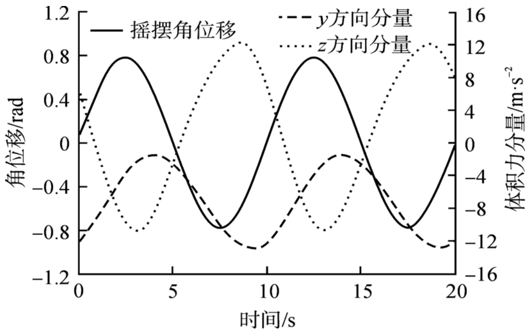

图 1　横摇相关量以及质量力变化曲线
Fig. 1　Rolling Parameters and Forces against Time

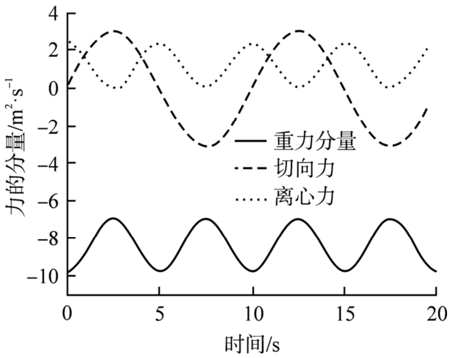

图 2　重力和各附加力变化曲线
Fig. 2　Gravity and Additional Forces against Time

3.7　纵摇

即沿着 y 轴的往复转动。热工研究上常常简化为正弦运动。经过类似的运算可得出：

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}g\sin\Phi-\beta z+\omega^2 x-2\omega u_{\mathrm{R},z}\\0\\-g\cos\Phi+\beta x+\omega^2 z+2\omega u_{\mathrm{R},x}\end{bmatrix}\tag{23}$$

质量力包含了重力、切向加速度、离心力和科氏力。质量力在 2 个方向有投影，也是周期性的变化，因此和横摇可以类比，此不赘述。

3.8　船首摇或者转弯

也就是沿着 z 轴的转动。经过简单运算，可得到质量力为：

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}\beta y+\omega^2 x+2\omega u_{\mathrm{R},y}\\-\beta x+\omega^2 y-2\omega u_{\mathrm{R},x}\\-g\end{bmatrix}\tag{24}$$

质量力包含了重力加速度、切向加速度、离心加速度和科氏力。由于船首摇摆不改变 z 轴的方向，所以重力始终在 z 方向并保持不变；而在其他 2 个方向则存在由摇摆引起的附加力。对于船首摇，热工研究上常常简化为正弦运动：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Phi}=\Phi[1,0,0]^{\mathrm{T}}=A_{\mathrm{m}}\sin\dfrac{2\pi}{T}t[0,0,1]^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\omega}=\dfrac{2\pi}{T}A_{\mathrm{m}}\cos\dfrac{2\pi}{T}t[1,0,0]^{\mathrm{T}}=\omega[0,0,1]^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}=-\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2A_{\mathrm{m}}\sin\dfrac{2\pi}{T}t[1,0,0]^{\mathrm{T}}=\beta[0,0,1]^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{a}=[0,0,0]^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{25}$$

图 3 给出了摇摆幅度 45°，摇摆周期 10 s，x 和 y 设定为 10 m 得到的质量力各个分量（未计入科氏力）。切向力和摇摆运动同周期，而离心力的周期是运动周期的 1/2，二者的叠加为图 3 中的平顶正弦曲线。

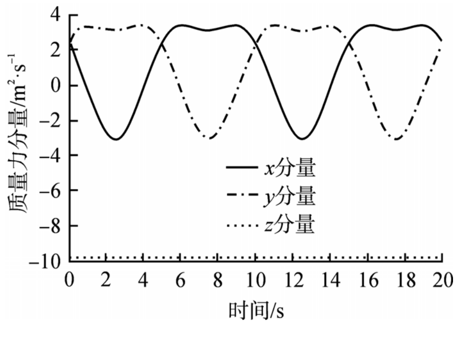

图 3　船首摇质量力分量变化曲线
Fig. 3　Components of Forces against Time for Yaw Motion

对于转弯，此处仅考虑匀速转弯的情况，即ω为常数，则角加速度为 0。设最大转向角度为$\varPhi$，则持续时间为$T=\varPhi/\omega$。此时质量力可简化为：

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}\omega^2 x+2\omega u_{\mathrm{R},y}\\ \omega^2 y-2\omega u_{\mathrm{R},x}\\ -g\end{bmatrix} \tag{26}$$

对于 2 个或多个典型海洋条件相互耦合的情况，仍然依据通用展开式进行计算即可得出。限于篇幅在此不赘述。

4 结　论

基于严格的数学推导，得出了流体质量力在非惯性系坐标下的通用展开式，并基于通式讨论了各种典型海洋条件下力的表达式，主要结论有：

（1）非惯性系中流体动量方程的质量力项包含重力和运动附加力，因定义参数的坐标系统不一致，运算前必须进行矢量的坐标变换。

（2）基于运动附加力的矢量公式，得出了质量力在非惯性系中的通用表达式，可适用于任何运动条件。

（3）典型海洋条件下质量力的表达式可以根据本文得到的通式自然简化得出，无需借助图示法逐个进行繁琐的处理，从而保证了结果的统一性和简洁性。

致谢：

中国核动力研究设计院曾小康和赵文博二位同仁对三维转动的过渡矩阵进行了独立校核，特此致谢。

参考文献：

[1] 杜思佳. 海洋条件对单相强迫循环流动影响的理论研究[D]. 清华大学工程物理系博士论文, 2011.

[2] 钱立波, 田文喜, 秋穗正，等. 一维冷却剂通道海洋条件附加力模型研究[J]. 核动力工程，2012，33(2)：104-109.

[3] 张鸣远, 景思睿, 李国君. 高等工程流体力学[M]. 西安：西安交通大学出版社, 2006.

[4] 魏战线. 线性代数与解析几何[M]. 北京：高等教育出版社, 2004.

[5] Pope S B. Turbulent Flows[M]. London: Cambridge University Press, 2010.

（责任编辑：张祚豪）