

文章编号: 0258-0926(2017)03-0038-05; doi:10.13832/j.jnpe.2017.03.0038

# SP<sub>3</sub> 方程的非线性迭代解法研究

潘清泉<sup>1,2</sup>, 卢皓亮<sup>2</sup>, 蔡利<sup>2</sup>, 李冬生<sup>2</sup>, 王侃<sup>1</sup>

1. 清华大学工程物理系, 北京, 100084; 2. 中广核研究院有限公司, 广东深圳, 518031

**摘要:** SP<sub>3</sub> 方程是简化球谐函数法三阶展开的中子输运方程, 比扩散方程的计算精度更高。本文采用非线性迭代的方法求解 SP<sub>3</sub> 方程, 并且提出了带角度离散的耦合修正关系式, 解决了 SP<sub>3</sub> 方程在真空边界条件下耦合修正关系复杂和非线性迭代中二阶中子注量率修正数值不稳定的问题。基于该方法编制非线性迭代求解 SP<sub>3</sub> 方程的计算程序 NLSP<sub>3</sub>, 对基准题进行了计算。数值结果表明, 本文所采用的非线性迭代求解 SP<sub>3</sub> 的方法是正确的, 且具有较好的计算精度。

**关键词:** 半解析节块法; 非线性迭代; 简化球谐函数法; 数值不稳定性

**中图分类号:** TL392<sup>+</sup>.2 **文献标志码:** A

## Nonlinear Iterative Method for Solving SP<sub>3</sub> Equation

Pan Qingquan<sup>1,2</sup>, Lu Haoliang<sup>2</sup>, Cai Li<sup>2</sup>, Li Dongsheng<sup>2</sup>, Wang Kan<sup>1</sup>

1. Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing, 100084, China;  
2. China Nuclear Power Technology Research Institute, Shenzhen, Guangdong, 518031, China

**Abstract:** The SP<sub>3</sub> equation is an approximation of the 3<sup>rd</sup>-order spherical harmonic method. Relative to the diffusion theory, it has higher accuracy for calculation. Adopting the nonlinear iterative method to solve the SP<sub>3</sub> equation, and putting forward the coupling relationship with Angular discrete, the problems of the complexity about the coupling relationship in the vacuum-boundary and the numerical instability during correction for 2<sup>nd</sup>-order flux are successfully solved. A code named NLSP<sub>3</sub> for solving the SP<sub>3</sub> equation with nonlinear iterative method was developed. Through the calculation of the benchmark problems, the feasibility of the algorithm is proved.

**Key words:** Semi-analytical nodal, Nonlinear iteration, Simplified spherical harmonic, Numerical instability

## 0 前言

应用最为广泛的中子输运方程的解析求法是分离变量法。在正交曲面坐标系中利用分离变量法对输运方程进行本征值计算, 会得到关于极角的缔合勒让德方程和关于方位角的常微分方程。结合缔合勒让德方程和常微分方程的本征函数就可以得到球谐函数, 故可以用球谐函数对空间角度  $\Omega$  进行离散, 这就是球谐函数展开法<sup>[1]</sup>。在一维问题中, 方位角具有对称性, 缔合勒让德方程简化为勒让德方程。勒让德方程的本征函数是勒让德多项式; 一维问题便可以用形式简单的勒让

德多项式展开中子注量率和散射截面。对于三维输运问题, 先假设具有对称性, 利用勒让德多项式去替代形式复杂的球谐函数进行多项式展开, 然后直接用三维算符替代一维算符得到三维方程组。这种从一维问题入手, 拓展到三维物理模型的求解方法就是简化球谐函数 (SP<sub>N</sub>) 法<sup>[2]</sup>。简化球谐函数法极大地简化了计算式的复杂性, 降低了计算难度, 且具有较高的计算精度。非线性迭代求解 SP<sub>3</sub> 方程的方法可以减少计算量, 但是会引入数值不稳定的问题, 同时在真空边界条件下使得耦合修正关系复杂。文中将常规耦合修正关

收稿日期: 2016-08-15; 修回日期: 2017-03-02

作者简介: 潘清泉 (1993—), 男, 博士研究生, 现从事中子输运方程数值计算方法研究

系进行变形，引入角度上的离散，实现了非线性迭代法求解 SP<sub>3</sub> 方程。

## 1 SP<sub>3</sub> 方程数值计算方法

Brantly 和 Larsen<sup>[3]</sup>通过变分法推导出了 SP<sub>3</sub> 方程和边界条件，变形后会得到与中子扩散方程相似的形式，故可以采用与求解中子扩散方程相同的方法进行求解。

非线性迭代方法<sup>[4]</sup>利用代数精度较高的计算结果去修正代数精度为 1 的计算过程；其中代数精度较高的计算结果是通过高阶节块法求解得到的耦合修正因子；代数精度为 1 的计算过程是迭代求解粗网差分方程（CMFD）。常规的耦合修正关系式见文献<sup>[4]</sup>。由于 SP<sub>3</sub> 方程的偏中子流表达式较复杂，特别在真空边界条件下，需要对入射流进行单独处理。另外，为了解决 SP<sub>3</sub> 方程非线性迭代求解的数值不稳定问题，需要将常规的耦合修正关系式转化为带角度离散的耦合修正关系式，如下：

$$\begin{aligned} J_{0,gu+}^k &= -D_{1,gu+}^{k,\text{FDM}} (f_{0,gu-}^{k+1} \bar{\phi}_{0,g}^{k+1} - f_{0,gu+}^k \bar{\phi}_{0,g}^k) - \\ &D_{1,gu+}^{k,\text{NOD}} (f_{0,gu-}^{k+1} \bar{\phi}_{0,g}^{k+1} + f_{0,gu+}^k \bar{\phi}_{0,g}^k) - \\ &D_{3,gu+}^{k,\text{FDM}} (f_{2,gu-}^{k+1} \bar{\phi}_{2,g}^{k+1} - f_{2,gu+}^k \bar{\phi}_{2,g}^k) - \\ &D_{3,gu+}^{k,\text{NOD}} (f_{2,gu-}^{k+1} \bar{\phi}_{2,g}^{k+1} + f_{2,gu+}^k \bar{\phi}_{2,g}^k) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{2,gu+}^k &= -D_{2,gu+}^{k,\text{FDM}} (f_{2,gu-}^{k+1} \bar{\phi}_{2,g}^{k+1} - f_{2,gu+}^k \bar{\phi}_{2,g}^k) - \\ &D_{2,gu+}^{k,\text{NOD}} (f_{2,gu-}^{k+1} \bar{\phi}_{2,g}^{k+1} + f_{2,gu+}^k \bar{\phi}_{2,g}^k) - \\ &D_{4,gu+}^{k,\text{FDM}} (f_{0,gu-}^{k+1} \bar{\phi}_{0,g}^{k+1} - f_{0,gu+}^k \bar{\phi}_{0,g}^k) - \\ &D_{4,gu+}^{k,\text{NOD}} (f_{0,gu-}^{k+1} \bar{\phi}_{0,g}^{k+1} + f_{0,gu+}^k \bar{\phi}_{0,g}^k) \quad (2) \end{aligned}$$

式中， $k$  为节块编号； $g$  为能群编号； $u$  为取定的坐标方向； $u \pm$  代表节块在  $u$  方向上的正负值； $J_{n,gu+}^k$  为各阶净中子流； $f_{n,gu+}^k$  为各阶节块在界面处的不连续因子； $\bar{\phi}_{n,g}^k$  为各阶中子注量率； $D_{n,gu+}^{k,\text{FDM}}$  为各阶伪扩散系数； $D_{n,gu+}^{k,\text{NOD}}$  为各阶耦合修正因子， $n=1, 2, 3, 4$ 。

半解析节块法计算多群方程时具有较高的计算精度，适用于 SP<sub>3</sub> 方程。因此，编写的计算程序 NLSP3 采用半解析节块法计算节块表面净中子流。该法的核心是求解横向积分方程。横向积分方程（省略能群和节块数）如下：

$$\begin{aligned} &-D_0 \frac{\partial}{\partial u^2} \phi_{0u}(u) + \Sigma_0 \phi_{0u}(u) - 2\Sigma_0 \phi_{2u}(u) \\ &= S_{0u}(u) - L_{0u}(u) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-D_2 \frac{\partial}{\partial u^2} \phi_{2u}(u) + \Sigma_2 \phi_{2u}(u) - \frac{2}{5} \Sigma_0 \phi_{0u}(u) \\ &= -\frac{2}{5} S_{0u}(u) - L_{2u}(u) \quad (4) \end{aligned}$$

式中， $D_0$  为 0 阶中子注量率的扩散系数； $D_2$  为 2 阶中子注量率的扩散系数； $S_{0u}$  为中子源项； $L_{0u}$  为 0 阶中子注量率的横向泄漏率； $L_{2u}$  为 2 阶中子注量率的横向泄漏率； $\phi_{0u}$  为 0 阶横向积分中子注量率； $\phi_{2u}$  为 2 阶横向积分中子注量率； $\Sigma_0$  为 0 阶中子注量率的移出截面； $\Sigma_2$  为 2 阶中子注量率的移出截面。

利用半解析节块法的四阶多项式<sup>[4]</sup>展开横向积分中子注量率：

$$\phi_{n,gu}^k(u) = \bar{\phi}_g^k + \sum_{i=1}^4 a_{n,gui}^k P_{ni} \left( \frac{2u}{\Delta u_k} \right) \quad (5)$$

联立求解横向积分方程的零次矩、一次矩、二次矩和边界连续条件可得展开系数，从而得出节块的界面净中子流。

$$\begin{aligned} J_{n,gu+}^k &= \frac{D_{n,g}^k}{\Delta u_k / 2} (a_{n,gu1}^k + 3a_{n,gu2}^k + F_{n,gu}^k a_{n,gu3}^k + \\ &G_{n,gu}^k a_{n,gu4}^k) \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{n,gu-}^k &= \frac{D_{n,g}^k}{\Delta u_k / 2} (a_{n,gu1}^k - 3a_{n,gu2}^k + F_{n,gu}^k a_{n,gu3}^k - \\ &G_{n,gu}^k a_{n,gu4}^k) \quad (7) \end{aligned}$$

$$F_{n,gu}^k = \frac{\alpha_{n,gu}^k \cosh(\alpha_{n,gu}^k) - m_{nu1}^k (\sinh)}{\sinh(\alpha_{n,gu}^k) - m_{nu1}^k (\sinh)} \quad (8)$$

$$G_{n,gu}^k = \frac{\alpha_{n,gu}^k \sinh(\alpha_{n,gu}^k) - 3m_{nu2}^k (\cosh)}{\cosh(\alpha_{n,gu}^k) - m_{nu0}^k (\cosh) - m_{nu2}^k (\cosh)} \quad (9)$$

式中， $\Delta u_k$  为节块  $k$  在  $u$  方向上的宽度； $D_{n,g}^k$  为各节块的扩散系数； $a_{n,gui}^k$  为各阶中子注量率展开式的开展系数； $a_{n,gu}^k$  和  $m_{nu}^k$  为中间常量， $i=0, 1, 2, n=0, 2$ 。

由式（1）、式（2）、式（6）、式（7）、式（8）、式（9）求得耦合修正因子，将求得的耦合修正因子代入 CMFD 进行全堆扫描迭代求解，可得全堆中子注量率和功率分布。同时，SP<sub>3</sub> 的二

阶中子注量率比零阶中子注量率要小 2 个数量级，为了数值稳定性，要避免除小数，也就是不能用二阶中子注量率的值做除数。故二阶修正的耦合修正因子应选择  $D_{4,gu+}^{k,NOD}$ ，而放弃了常规的  $D_{2,gu+}^{k,NOD}$ ，这样就解决了非线性迭代的数值不稳定问题。

## 2 数值计算结果与分析

### 2.1 单群特征值问题

采用 NLSP3 计算单能各向同性的特征值问题，以验证 SP<sub>3</sub> 方程的特征值求解精度。几何结构见图 1，材料参数见表 1。将使用程序 S<sub>16</sub> 计算的有效增殖系数  $k_{eff}$  作为参考结果<sup>[3]</sup>，同时采用基于扩散理论和有限差分方法的 SP<sub>3</sub> 方程计算出两组解，见表 2。NLSP3 计算结果与参考结果吻合较好，显示出非线性迭代求解 SP<sub>3</sub> 方程在特征值求解上的准确性。

### 2.2 2D-IAEA 输运基准题

使用 NLSP3 模拟单能 5 区轻水池式反应堆<sup>[5]</sup>。几何结构如图 2 所示（四周均为真空边界条件），各区材料参数见表 3，计算结果见表 4。

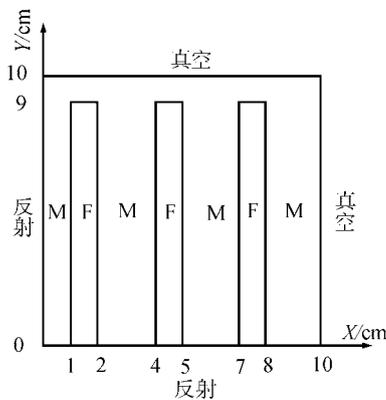


图 1 单能特征值问题几何结构

Fig. 1 Structure of Mono-Energetic Eigenvalue Problem  
F—燃料区；M—慢化剂区

表 1 单能特征值问题材料参数

Table 1 Material Parameters of Mono-Energetic Eigenvalue Problem

参数	材料	
	M	F
总截面/cm <sup>-1</sup>	1	1.5
散射截面/cm <sup>-1</sup>	0.93	1.35
裂变截面/cm <sup>-1</sup>	0	0.1
中子产出截面/cm <sup>-1</sup>	0	0.24

表 2 单群特征值问题计算结果

Table.2 Results of Mono-Energetic Eigenvalue Problem

方法	网格划分	$k_{eff}$	与参考结果 相对偏差/%
S <sub>16</sub>	150×150	0.806132	
P <sub>1</sub> (扩散法)	100×100	0.776534	-3.672
SP <sub>3</sub> (有限差分法)	100×100	0.798617	-0.932
NLSP3	100×100	0.798979	-0.887

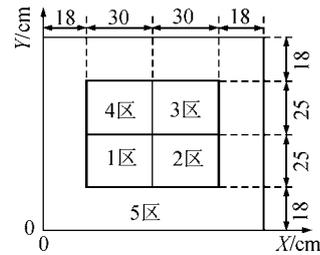


图 2 2D-IAEA 几何结构

Fig.2 Structure of 2D-IAEA

表 3 2D-IAEA 材料参数

Table 3 Material Parameters of 2D-IAEA

区域	总截面/cm <sup>-1</sup>	散射截面/cm <sup>-1</sup>	中子产出截面/cm <sup>-1</sup>
1	0.60	0.53	0.079
2	0.48	0.20	0.0
3	0.70	0.66	0.043
4	0.65	0.50	0.0
5	0.90	0.89	0.0

表 4 2D-IAEA 计算结果

Table.4 Results of 2D-IAEA

程序	网格划分	1 区中子 注量率	2 区中子 注量率	3 区中子 注量率
SURCU	—	0.01686	1.25	0.41
DNTR (S <sub>4</sub> )	1148Δ	0.01686	1.25	0.35
EFEN	72×64□	0.01686	1.25	0.40
NLSP3	16×16□	0.01686	1.24	0.27
NLSP3	96×86□	0.01686	1.24	0.36
程序	网格划分	4 区中子 注量率	5 区中子 注量率	$k_{eff}$
SURCU	—	2.95	7.91	1.0083
DNTR (S <sub>4</sub> )	1148Δ	2.95	7.91	1.0085
EFEN	72×64□	2.97	7.95	1.0078
NLSP3	16×16□	2.94	7.15	1.0088
NLSP3	96×86□	2.94	7.89	1.0089

注：Δ—三角形网格划分；□—矩形网格划分

与程序 SURCU、DNTR<sup>[6]</sup>和 EFEN<sup>[7]</sup>的计算结果对比表明：网格划分相近时，NLSP3 与其他程序具有相当的计算精度，同时 NLSP3 细网格比粗网格的计算精度高。

### 2.3 3D-TAKEDA 快堆基准题

3D-TAKEDA 快堆基准题<sup>[8]</sup>为：一个小型快中子增殖堆，一共有 5 个材料区，分别为燃料区、

轴向增殖区、径向增殖区、钠填充区和控制棒。控制棒有半提起和全提起 2 种工况。几何结构见图 3，参考解由蒙特卡洛方法求得。使用 NLSP3 对控制棒全提起工况和半提起工况（网格划分为 5 cm×5 cm×5 cm）进行 4 群计算。 $k_{eff}$  和区域平均中子注量率分布分别见表 5、表 6。计算结果表明：2 种工况下， $k_{eff}$  计算误差很小；除了控制棒区和钠填充区部分能群中子注量率误差较大外，计算结果都与参考解吻合较好。同时在控制棒全提起工况下，在相同网格划分的情况下，NLSP3 对于 3D-TAKEDA 基准题的计算精度比基于指数函数法求解 SP<sub>3</sub> 方程的程序 NSP<sub>n</sub> 计算精度<sup>[6]</sup>高。

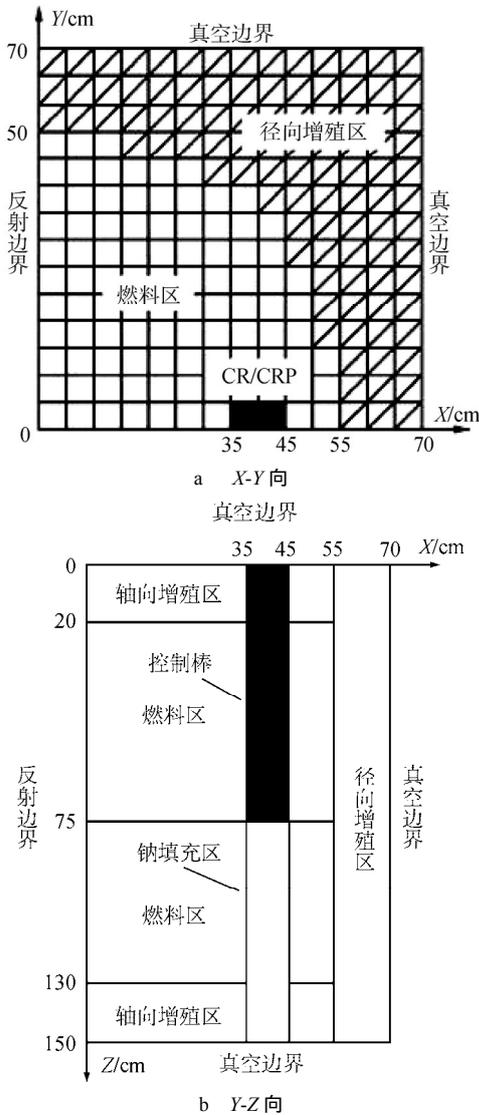


图 3 3D-TAKEDA 几何结构  
Fig. 3 Structure of 3D-TAKEDA  
注：CR/CRP 为控制棒、钠填充物

表 5 3D-TAKEDA 控制棒全提起工况下计算结果

Table 5 Results of 3D-TAKEDA with Control Rods Full-Lifted

区域	能群	参考解	NSPn	NLSP3
		$k_{eff}$	$k_{eff}$ 偏差/%	$k_{eff}$ 偏差/%
		中子注量率/ $10^{-5}$	中子注量率偏差/%	中子注量率偏差/%
燃料区	1	4.2814	0.065	-0.3130
	2	24.081	0.014	-0.1568
	3	16.411	-0.240	-0.1378
	4	0.62247	-0.678	-0.3043
轴向增殖区	1	0.51850	2.065	0.8094
	2	4.6912	1.272	0.1072
	3	4.6978	0.888	-0.0715
	4	0.37736	-0.229	-0.9802
径向增殖区	1	0.33252	2.351	0.9507
	2	3.0893	1.110	-0.1350
	3	3.2834	0.879	-0.2095
	4	0.20473	0.698	-0.2451
钠填充区	1	2.5344	3.398	2.7975
	2	16.658	0.361	-0.0637
	3	12.648	0.360	0.0809
	4	0.69840	0.917	0.1865

表 6 3D-TAKEDA 控制棒半提起工况下计算结果

Table 6 Results of 3D-TAKEDA with Control Rods Half-Lifted

区域	能群	参考解	NSPn	NLSP3
		$k_{eff}$	$k_{eff}$ 偏差/%	$k_{eff}$ 偏差/%
		中子注量率/ $10^{-5}$	中子注量率偏差/%	中子注量率偏差/%
燃料区	1	4.3482	-0.1495	-0.3036
	2	24.171	-0.0538	-0.0788
	3	16.200	0.0123	-0.0340
	4	0.60438	-0.2267	-0.3167
轴向增殖区	1	0.52209	2.4938	1.2929
	2	4.6772	1.1267	0.2625
	3	4.6190	0.6019	0.0550
	4	0.36287	0.4850	0.0657
径向增殖区	1	0.33176	2.1190	0.7786
	2	3.0438	0.9922	-0.0065
	3	3.2126	0.4513	-0.2597
	4	0.20016	-0.0450	-0.6732
钠填充区	1	2.5902	0.2239	2.1141
	2	16.779	-0.6139	-0.4381
	3	12.551	-0.9641	-0.7396
	4	0.70648	-5.6590	-4.7031
控制棒	1	1.6556	3.8355	3.4186
	2	9.1050	2.4481	1.6406
	3	5.1815	1.8084	1.1384
	4	0.11073	2.9080	0.7708

### 3 结束语

带角度离散的耦合修正关系式成功解决了 $SP_3$ 方程真空边界条件下耦合修正关系复杂和非线性迭代二阶中子注量率修正数值不稳定的问题。非线性迭代求解 $SP_3$ 方程的方法具有计算可行性,自主研制的计算程序NLSP3具有较高的计算精度。

#### 参考文献:

- [1] 谢仲生,邓力. 中子输运理论数值计算方法. 西安:西安交通大学出版社[M]. 2005.
- [2] Gelbard EM. Applications of spherical harmonics method to reactor problems[J]. Technical Report WAPD-BT-20, Bettis Atomic Power Laboratory, 1960.
- [3] Brantley Patric S, Larsen Edwar W. The Simplified P3 Approximation[J]. Nucl Sci Eng, 2000, 134: 1-21.
- [4] 廖承奎. 三维节块中子动力学方程组的数值解法及物理与热工-水力耦合瞬态过程的数值计算的研究[D]. 西安交通大学, 2002.
- [5] Stepanek J, Auerbach T, Haelg W. Calculation of four thermal reactor benchmark problems in X-Y geometry [R]. EPRI NP-2855, 1983.
- [6] 李云召,吴宏春,曹良志,等. 节块 $SP_3$ 方法求解中子输运方程[J]. 核动力工程, 2010, 31(S2): 73-78.
- [7] Li y z, Wu h c, Cao l z. A polygonal nodal- $sp_3$  method for whole core pin-by-pin calculation[C].M&C2011. Rio de Janeiro. Brazil. 2011
- [8] Takeda T, Ikeda H. 3-D Neutron Transport Benchmarks [R]. OECD/NEA Committee on Reactor Physics (NEACRP). NEACRP-L-330. Japan:OSAKA University, 1991.

(责任编辑:王中强)