

文章编号: 0258-0926(2018)02-0096-05; doi: 10.13832/j.jnpe.2018.00.0096

一维非稳态导热反问题反演管道内壁面温度波动

熊平¹, 艾红雷², 卢涛^{1*}, 王新军²

1. 北京化工大学机电工程学院, 北京, 100029; 2. 中国核动力研究设计院核反应堆系统设计技术重点实验室, 成都, 610213

摘要:以一维圆管壁厚为研究对象, 基于有限差分法的瞬态导热正问题以及基于共轭梯度法的优化算法来构建一维瞬态导热反问题数学模型。采用 C 语言编写通用计算程序, 以正问题所得到的外壁面温度波动值作为导热反问题的已知条件, 并引入随机测量误差, 探讨测量误差对反演结果精度的影响。将反演值与作为边界条件的内壁面温度理论值进行对比分析。对比结果显示, 内壁面反演值与理论值吻合较好, 表明该瞬态导热反问题模型能够较好地反演得到内壁面温度波动值。

关键词:瞬态导热; 导热反问题; 共轭梯度法; 有限差分法

中图分类号: TL331 **文献标志码:** A

Inverse Problem of One-Dimensional Unsteady Heat Conduction Deducing Temperature Fluctuation of Inner Wall of Pipe

Xiong Ping¹, Ai Honglei², Lu Tao^{*1}, Wang Xinjun²

1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing University of Chemical Technology, Beijing, 100029, China;
2. Science and Technology on Reactor System Design Technology Laboratory, Nuclear Power Institute of China, Chengdu, 610213, China

Abstract: A one-dimensional transient thermal conduction inverse problem mathematical model is constructed based on the finite difference method (FDM) and the optimization algorithm based on the conjugate gradient method (CGM). The general calculation program is written in C language, and the temperature fluctuation value of the outer wall surface obtained by the direct heat conduction problem is used as the known condition of the inverse heat conduction problem. And the random measurement error is introduced to investigate the effect of measurement error on the accuracy of the inversion result. The inversion value is compared with the theoretical value of the inner wall surface as the boundary condition. The comparison results show that the inversion value of the internal wall surface is in good agreement with the theoretical value, indicating that the transient thermal conductivity anti-problem model can well inverse the temperature fluctuation value of the inner wall surface.

Key words: Unsteady heat conduction, Inverse heat conduction problems, Conjugate gradient methods, Finite difference method

0 引言

在核电管道系统中, 对管道进行热疲劳分析需要知道管道内壁面温度波动。然而, 对于这些有特殊安全要求或结构完备性要求的管道, 不允许在管道上开孔来安装温度传感器以直接测量管道内壁面温度。这时, 需要寻找一种间接的测量

方法来快速、准确地得到管道内壁面温度波动情况。通过测量易获得的外壁面温度波动来反演得到内壁面温度波动是一种行之有效的方法, 即导热反问题方法。由于导热反问题的不适定性和非线性, 使得求解导热反问题比求解导热正问题复杂困难得多。卢涛等^[1]反演了 T 型管内壁瞬态温

收稿日期: 2017-09-05; 修回日期: 2017-12-05

基金项目: 中国核动力院核反应堆系统设计技术重点实验室基金 (No.HT-KFKT-02-2016014)

作者简介: 熊平 (1991—), 男, 硕士, 现从事工程热物理研究

*通讯作者: 卢涛, Email: likesurge@sina.com

度；王登刚等^[2]研究了非线性二维稳态导热反问题；范春利等^[3]应用导热反问题识别试件内壁的缺陷；杨海天和薛齐文等^[4-5]求解了稳态和瞬态导热反问题；宋馨等^[6]在考虑了热辐射的条件下求解了高温腔体内壁面温度波动的导热反问题。由于共轭梯度法在迭代计算过程中具有良好的抗不适定性^[7]，因此共轭梯度法被广泛地应用于导热反问题中。

本文基于共轭梯度法构建一维瞬态导热反问题数学模型，编写 C 语言通用计算程序，构造 3 组数值试验验证数学模型的有效性与计算程序精确性。

1 导热反问题数学模型

导热反问题的求解包括对导热正问题的求解和对解的优化 2 个过程。

本文研究对象为壁厚 8.7 mm 的圆管，导热系数 $\lambda=20.24 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ；外壁对流换热系数 $h=10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ ；环境温度为 $T_f=293 \text{ K}$ ；热扩散率 $\alpha=4.46\times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ；时间步长 $\Delta t=1 \text{ s}$ ；总时间 N 为 40 s。

1.1 导热正问题

一维导热物理模型如图 1 所示。

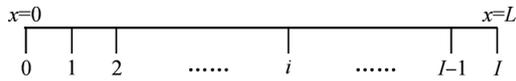


图 1 一维导热模型示意图

Fig.1 Sketch Map of One-Dimensional Heat Transfer Model
 i —空间节点编号； l —外壁面节点编号；
 x —节点到内壁面距离； L —圆管壁厚

其控制方程为：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < L \quad (1)$$

管壁内侧($x=0$)为第一类边界条件，外侧($x=L$)为第三类边界条件，即：

$$T|_{x=0} = T(t) \quad (2)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = h(T_w - T_f) \quad (3)$$

初始条件为：

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad (4)$$

式中， T 为温度； t 为时间； T_w 为外壁温度。以上各式构成了一维瞬态导热正问题，可采用数值

方法对上述定解问题进行求解，分别对以上诸式在时间和空间上进行离散，具体形式如下：

式(1)中左边时间项采用无条件稳定的全隐式格式，亦即：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,n} - T_{i,n-1}}{\Delta t} \quad (5)$$

式中， n 为时间节点编号。

式(1)右边空间项采用二阶精度的中心差分格式，亦即：

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha \frac{T_{i+1,n} + T_{i-1,n} - 2T_{i,n}}{\Delta x^2} \quad (6)$$

式中， Δx 表示节点间距。

将式(5)和式(6)代入式(1)，整理得到一维瞬态导热微分方程的全隐式离散格式，即：

$$-Fo \cdot T_{i-1,n} + (1 + 2Fo)T_{i,n} - Fo \cdot T_{i+1,n} = T_{i,n-1} \quad (7)$$

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \quad (8)$$

式中， Fo 为网格傅里叶数。

式(2)的离散格式为：

$$T_{0,n} = T(t) \quad (9)$$

式(3)整理后的离散格式为：

$$-2Fo \cdot T_{l-1,n} + (1 + 2 \cdot Bi \cdot Fo + Fo)T_{l,n} = 2 \cdot Bi \cdot Fo \cdot T_f + T_{l,n-1} \quad (10)$$

$$Bi = \frac{\Delta x \cdot h}{\lambda} \quad (11)$$

式中， Bi 为网格毕渥数。

式(4)初始条件的离散格式为：

$$T_{i,0} = T(i, 0) \quad 0 \leq i \leq l \quad (12)$$

联立式(7)~式(12)可以构建关于求解 $T_{i,n}$ 的代数方程组。方程组系数为三对角矩阵，采用高斯消元法求解。

1.2 导热反问题

导热正问题是已知管道内壁面温度波动，求解外壁面温度波动，是一个定解问题。而导热反问题是已知管道外壁面温度波动，求解管道内壁面温度波动，是一个最优化问题。该最优化问题的目标函数为：

$$J(T) = \sum_{n=1}^N \left[T_{l,n,\text{cal}} - T_{l,n,\text{mea}} \right]^2 \quad (13)$$

式中, $T_{I,n,cal}$ 为求解反问题得到的外壁面温度的计算值; $T_{I,n,mea}$ 为外壁面温度的测量值。当目标函数 $J(T)$ 达到最小时, 认为外壁面温度反演计算值 $T_{I,n,cal}$ 和测量值 $T_{I,n,mea}$ 最为接近, 从而认为此时的内壁面温度值为最优值。

基于共轭梯度法求解导热反问题, 首先求解敏感度系数, 求出外壁面测点处温度对内壁面温度的敏感度系数。对导热正问题的控制方程式分别对内壁面温度 $T_{0,n}$ 求偏导数得到该敏感度系数。

导热方程式 (1) 对 $T_{0,n}$ 求偏导数得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial T_{0,n}} \right) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial T}{\partial T_{0,n}} \right) \quad (14)$$

边界条件式 (2)、式 (3) 对 $T_{0,n}$ 求偏导数得到:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial T_{0,n}} \right|_{x=0} = \begin{cases} 1 & t = n \\ 0 & t \neq n \end{cases} \quad (15)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial T_{0,n}} \right) \right|_{x=L} = h \left(\frac{\partial T}{\partial T_{0,n}} \right) \quad (16)$$

初始条件式 (4) 对 $T_{0,n}$ 求偏导数得到初始条件式:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial T_{0,n}} \right|_{t=0} = 0 \quad (17)$$

联立式 (14)~式 (17), 采用同导热正问题一样的求解方法得到外壁面测点处温度对内壁面温度的敏感度系数 $\frac{\partial T_{I,n}}{\partial T_{0,n}}$ 。

目标函数式 (13) 对未知参量 $T_{0,n}$ 求偏导数得到目标函数梯度 $\frac{\partial J}{\partial T_{0,n}}$ 为:

$$\frac{\partial J}{\partial T_{0,n}} = 2 \sum_{n=1}^N (T_{I,n,cal} - T_{I,n,mea}) \frac{\partial T_{I,n}}{\partial T_{0,n}} \quad (18)$$

共轭梯度法的迭代式为:

$$(T_{0,n})_{b+1} = (T_{0,n})_b - \beta_b (d_{0,n})_b \quad (19)$$

式中, b 表示迭代步数; $(T_{0,n})_{b+1}$ 为新产生的内壁面温度; $(T_{0,n})_b$ 为上一次迭代的内壁面温度; β_b 表示迭代步长; $(d_{0,n})_b$ 表示迭代搜索方向。 β_b 和 $(d_{0,n})_b$ 分别由以下各式求得:

$$(d_{0,n})_b = \left(\frac{\partial J}{\partial T_{0,n}} \right)_b + \gamma_b (d_{0,n})_{b-1} \quad (20)$$

$$\gamma_b = \frac{\sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{\partial J}{\partial T_{0,n}} \right)_b \right]^2}{\sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{\partial J}{\partial T_{0,n}} \right)_{b-1} \right]^2} \quad (21)$$

式中, γ_b 为共轭系数, 且当 $b=0$ 时, 设定 $\gamma_0=0$ 。

迭代步长为:

$$\beta_b = \frac{\sum_{n=1}^N [(T_{I,n,cal})_b - T_{I,n,mea}]^2}{\sum_{i=1}^N \left[\sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial T_{I,i}}{\partial T_{0,n}} \right)_b (d_{0,n})_b \right]^2} \times \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial T_{I,i}}{\partial T_{0,i}} \right)_b (d_{0,i})_b \quad (22)$$

共轭系数法的迭代收敛目标为:

$$J(T_b) \leq \mu \quad (23)$$

式中, μ 为一个很小的正数。

2 共轭梯度法的实施步骤

共轭梯度法求解导热反问题的具体步骤如下:

(1) 求解 0 s 时刻稳态导热反问题, 获得内壁面初始时刻温度值 $T_{0,0}$, 并计算敏感度系数

$$\frac{\partial T_{I,n}}{\partial T_{0,n}}$$

(2) 设定内壁面温度迭代初始值 $(T_{0,n})_b$, 设定 $b=0$ 。

(3) 求解导热正问题, 得外壁面温度 $T_{I,n,cal}$, 并计算目标函数 $J(T_b)$ 。

(4) 判断是否达到迭代收敛目标 $J(T_b) \leq \mu$, 如果达到收敛目标则结束迭代, 否则转到步骤 (5)。

(5) 计算目标函数梯度 $\left(\frac{\partial J}{\partial T_{0,n}} \right)_b$, 迭代搜索方向 $(d_{0,n})_b$, 共轭系数 γ_b 及搜索步长 β_b 。

(6) 迭代计算内壁面新的温度值 $(T_{0,n})_{b+1}$, 并令迭代计算步数 $b = b + 1$, 回到步骤 (3)。

3 计算结果与误差分析

根据以上数学模型编写 C 语言通用计算程序，验证导热反问题的精确性。通过设定内壁面温度值，由导热正问题程序计算出外壁面温度；把外壁面温度值作为导热反问题的输入条件，由反问题程序反演出内壁面温度值；最后把反问题计算的内壁面温度值与作为边界条件的内壁面温度值作比较，验证导热反问题的精确性。分析在 3 种不同工况下的导热反问题，设定的内壁面温度有正弦温度变化、三角形温度变化以及随机温度变化。

为验证测量误差对反演结果的影响，在导热正问题计算得到的外壁面温度精确值的基础上，引入随机误差，模拟实际的外壁面温度测量值。

$$T_{l,n,mea} = T_{l,n,exact} + \sigma \xi \quad (24)$$

式中， $T_{l,n,exact}$ 为由正问题计算得到的外壁面温度精确值； σ 为标准偏差； ξ 为 -1~1 之间的随机数。

为验证反演值与实际值的偏离程度，定义绝对平均误差 ω 为：

$$\omega = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |T_{0,n,exact} - T_{0,n,est}| \quad (25)$$

式中， $T_{0,n,exact}$ 为内壁面温度精确值； $T_{0,n,est}$ 为内壁面温度反演值； ω 越小，则说明反演值与精确值偏离程度越小，反演值越接近于精确值。

3.1 正弦温度

设定内壁面温度变化为：

$$T(t) = 50 \sin\left(\frac{\pi}{20}t + \frac{\pi}{2}\right) + 350 \quad (26)$$

图 2 表示在不同的标准偏差下反演值与精确值之间的误差。由图 2 可以看出，当标准偏差 $\sigma = 0$ 时，反演温度非常接近于精确值，其最大反演误差为 0.0629；随着标准偏差的增大，反演误差也随之增大，当标准偏差 $\sigma = 1$ 时，其最大反演误差为 12.9906。表 1 表示在不同标准偏差下的绝对平均误差，由表 1 可以看出，标准偏差 $\sigma = 0$ 的反演绝对平均误差为 0.0232；标准偏差 $\sigma = 1$ 时的绝对平均误差为 3.9630，说明测量偏差对反演精度的影响较大。

3.2 三角形温度

设定内壁面三角形温度变化为：

$$T(t) = \begin{cases} 5t + 300 & t \in [0, 20) \\ -5(t - 20) + 400 & t \in [20, 40) \end{cases} \quad (27)$$

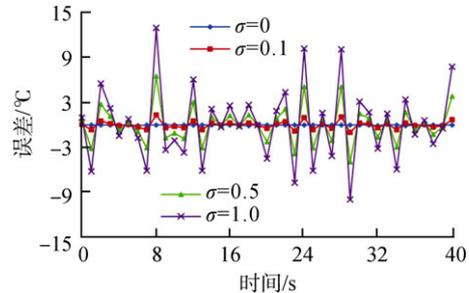


图 2 正弦温度变化的反演值与精确值的误差

Fig.2 Error of Sinusoidal Temperature of Inverse Value with Exact Value

表 1 绝对误差值

Table 1 Value of Absolute Error

σ	ω		
	正弦温度	三角形温度	随机温度
0	0.0232	0.0204	0.0244
0.1	0.3995	0.3836	0.4014
0.5	1.9825	1.9568	1.9910
1.0	3.9630	3.8728	4.0676

根据式 (27) 验证内壁面三角形温度变化情况下的反演结果。由图 3 可以看出， $\sigma = 0$ 和 $\sigma = 0.1$ 时，反演值与精确值非常接近，随着标准偏差 σ 增大，反演误差值也不断增大，但均随着精确温度值来回波动。由表 1 可以看出，当 $\sigma = 0$ 时，反演误差值的绝对平均误差为 0.0204；当 $\sigma = 1$ 时，反演误差值的绝对平均误差为 3.8728。绝对平均误差随着标准偏差的增大而增大。

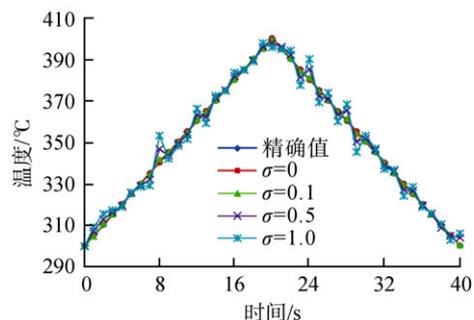


图 3 三角形温度变化的反演值与精确值

Fig.3 Inverse Value and Exact Value of Triangle Temperature

3.3 随机温度

设定内壁面温度在 300~400 K 之间随机变化，验证内壁面随机温度变化情况下的反演结果。由

图4可以看出,当 $\sigma=1$ 时,其内壁面反演温度值与精确值之间的最大误差为9.9258。由表1可以看出, $\sigma=1$ 时的绝对平均误差为4.0676。

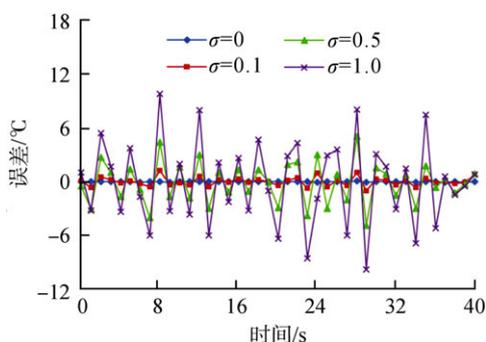


图4 随机温度变化的反演值与精确值的误差

Fig. 4 Error of Random Temperature of Inverse Value with Exact Value

4 结论

(1) 利用共轭梯度法求解一维瞬态导热反问题。使用全隐式有限差分法求解导热正问题,给出了有限差分的具体实施方法;采用高斯消元算法求解离散的温度载荷矩阵;采用共轭梯度法建立导热反问题模型,导出了反问题计算公式,并写出了反问题计算具体实施步骤。

(2) 通过编写C语言通用算法程序,并通过数值试验验证本文所构数学模型的精确性。数

值试验结果显示,该反问题算法能够较精确地反演出内壁面温度波动。

(3) 探讨了测量误差对反演结果的影响,对导热正问题计算得到的外壁面温度值引入随机误差,模拟实际测量值。计算结果表明,反演误差随着标准偏差的增大而增大。

参考文献:

- [1] 卢涛,李春永.基于共轭梯度法对T型管内壁瞬态温度的识别[J].热科学与技术,2011,10(1):45-50.
- [2] 王登刚,刘迎曦,李守巨,等.非线性二维稳态导热反问题的一种数值解法[J].西安交通大学学报,2000,34(11):49-52.
- [3] 范春利,孙丰瑞,杨立.基于红外线测温的内壁缺陷尺寸、方位的计算方法研究[J].热科学与技术,2005,4(1):82-86.
- [4] 杨海天,胡国俊,薛齐文.共轭梯度法求解稳态传热组合边界条件反问题[J].大连理工大学学报,2003,34(2):136-139.
- [5] 薛齐文,杨海天,胡国俊.共轭梯度法求解瞬态传热组合边界条件多宗量反问题[J].应用基础与工程科学学报,2004,12(2):113-120.
- [6] 宋馨,张有为,马巨印.反演高温腔体内壁面温度波动的辐射边界导热反问题[J].热科学与技术,2016,15(2):104-108.
- [7] Huang ChengHung, Chen ChinWei. A boundary-element-based inverse problem of estimate in boundary conditions in an irregular domain with statistical analysis[J]. Numerical Heat Transfer, part B, 1998, 33: 251-268.

(责任编辑:马蓉)